Title	A note on continuity of grafting maps (Perspectives of Hyperbolic Spaces II)
Author(s)	糸, 健太郎
Citation	数理解析研究所講究録 (2004), 1387: 36-43
Issue Date	2004-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/25782
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1387 巻 2004 年 36-43

A note on continuity of grafting maps

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　糸 健太郎　(Kentaro Ito)
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

1 Abstract

曲面 S 上の射影構造空間 $P(S)$ において，擬フックス群ホロノミーを持つ元から成る部分集合を $Q(S)$ は無限個の連結成分 $\{\mathcal{Q}_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)}$ を持つ．ここではまず，連結成分の閉包が互いに接している様子を説明する．次に grafting map（接ぎ木写像）$\mathrm{Gr}_\lambda:\mathcal{Q}_0\to\mathcal{Q}_\lambda$ が $\mathcal{Q}_0$ のある種の理想境界にまで連続に延びることや，擬フックス群に関する Goldman's Grafting Theorem が任意の b-group においても成り立つことを示す.

2 Preliminaries

S を向き付けられた種数 2 以上の閉曲面とする．S 上の射影構造とは $(\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}),\hat{\mathbf{C}})$-構造，すなわち局所的に $\hat{\mathbf{C}}$ をモデルとし，その張り合わせ写像が Möbius 写像であるような極大局所座標系のことである．S 上の marking 込みの射影構造全体の空間 $P(S)$ は Teichmuller 空間 $T(S)$ の正則余接バンドル $T^*T(S)$ と同一視でき，複素 $6g-6$ 次元多様体である.

$\Sigma\in P(S)$ に対して，Σ の普遍被覆 $\tilde{\Sigma}$ 上で developing map（展開写像）$f_\Sigma:\tilde{\Sigma}\to\hat{\mathbf{C}}$ が定まり，この写像が誘導する準同型 $\rho_\Sigma:\pi_1(S)\to\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ をホロノミー表現という．すなわち，$f_\Sigma\circ\gamma=\rho_\Sigma(\gamma)\circ f_\Sigma$ $(\forall\gamma\in\pi_1(S))$ が成り立つ．ここで

$$R(S)=\{[\rho]\,|\,\rho(\pi_1(S)):\text{non-abelian}\}\subset\mathrm{Hom}(\pi_1(S),\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}))/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$$

と定めると，$R(S)$ は複素 $6g-6$ 次元多様体となることが知られている．また $\forall\Sigma\in P(S)$ に対して $[\rho_\Sigma]\in R(S)$ であり，対応 $\Sigma\mapsto[\rho_\Sigma]$ によりホロノミー写像

$$\mathrm{hol}:P(S)\to R(S)$$

を定めると，これは**局所同相**な正則写像である (Hejhal).

$R(S)$ の部分集合

$$QF(S)=\{[\rho]\in R(S)\,|\,\rho:\text{ faithful, }\rho(\pi_1(S)):\text{quasi-fuchsian}\}$$

を quasi-fuchsian space という．$\overline{QF(S)}\subset AH(S)\subset R(S)$ である．また $QF(S)$ は Teichmuller space の直積 $T(S)\times T(S^*)$ と自然に同一視される．以下では，主に

$P(S)$ の部分集合 $Q(S) = \mathrm{hol}^{-1}(QF(S))$ を考察する．$Q(S)$ の任意の連結成分 $\mathcal{Q}$ に対して $\mathrm{hol}|\mathcal{Q} : \mathcal{Q} \to QF(S)$ は双正則写像である．さらに Goldman's Grafting Theorem [Go] より，$Q(S)$ の連結成分全体は integral measured lamination の集合 $\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ と 1 対 1 対応がつくことがわかる．ここで

$$\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S) = \{\lambda = \sum k_j C_j \mid k_j \in \mathbf{N},\ \{C_j\} : \text{disjoint s.c.c.}\}.$$

$\Sigma \in Q(S)$ は f_Σ が単射であるとき standard, そうでないとき exotic という．いま $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対応する $Q(S)$ の連結成分を $\mathcal{Q}_\lambda$ と書くと，$Q(S)$ の連結成分分解

$$Q(S) = \bigsqcup_{\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)} \mathcal{Q}_\lambda$$

を得る．ここで $\mathcal{Q}_0$ は standard な射影構造より成る唯一の連結成分である．双正則写像 $\mathrm{Gr}_\lambda : \mathcal{Q}_0 \to \mathcal{Q}_\lambda$ で $\mathrm{hol} \circ \mathrm{Gr}_\lambda = \mathrm{hol}$ を満たすものを λ に関する grafting map という．$\Sigma \in \mathcal{Q}_0$ に対して $\Sigma_\lambda = \mathrm{Gr}_\lambda(\Sigma)$ とかく．

3 これまでの結果

$\mathcal{Q}_\lambda$ の $P(S)$ における閉包を $\overline{\mathcal{Q}_\lambda}$ とかく．次の定理は McMullen の結果 [Mc] を精密化したものである．

Theorem 3.1 ([It1]). 任意の $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S) - \{0\}$ に対して $\overline{\mathcal{Q}_0} \cap \overline{\mathcal{Q}_\lambda} \neq \emptyset$ が成り立つ．さらに $i(\cdot,\cdot)$ を幾何的交点数とするとき，任意の有限集合 $\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S) - \{0\}$ で $i(\lambda_j, \lambda_k) = 0\ (\forall j, k)$ を満たすものに対して，次が成り立つ：

$$\overline{\mathcal{Q}_0} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} \overline{\mathcal{Q}_{\lambda_i}} \right) \neq \emptyset.$$

Theorem 3.2 ([It2]). $\lambda, \mu \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S) - \{0\}$ は平行成分を持たないとする．このとき，$(\lambda,\mu)_\sharp, (\lambda,\mu)_\flat \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ と，射影構造の列 $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbf{Z}}, \{\Sigma'_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \subset Q(S)$ が存在して次を満たす（図 1 参照）：

(1) $\{\Sigma_n\}_{|n|\gg 0} \subset \mathcal{Q}_\lambda$ $\Sigma_n \to \Sigma \in \overline{\mathcal{Q}_0} \cap \overline{\mathcal{Q}_\lambda}$ *as* $|n| \to \infty$,

(2) $\{\Sigma'_n\}_{n\gg 0} \subset \mathcal{Q}_{(\lambda,\mu)_\sharp}$, $\{\Sigma'_n\}_{n\ll 0} \subset \mathcal{Q}_{(\lambda,\mu)_\flat}$ かつ $\Sigma'_n \to \Sigma' \in \overline{\mathcal{Q}_\mu}$ *as* $|n| \to \infty$,

(3) $\mathrm{hol}(\Sigma_n) = \mathrm{hol}(\Sigma'_n)\ (\forall |n| \gg 0)$ かつ $\mathrm{hol}(\Sigma) = \mathrm{hol}(\Sigma')$.

Corollary 3.3 ([It2]). 任意の $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S) - \{0\}$ に対して $\mathcal{Q}_\lambda$ は *self-bump* する．すなわち，ある $\Sigma \in \overline{\mathcal{Q}_0} \cap \overline{\mathcal{Q}_\lambda}$ が存在して，Σ の十分小さな任意の近傍 U に対して $U \cap \mathcal{Q}_\lambda$ は非連結である．

Theorem 3.4 ([It2]). 任意の $\lambda, \mu \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対して $\overline{\mathcal{Q}_\lambda} \cap \overline{\mathcal{Q}_\mu} \neq \emptyset$.

ここで $(\lambda,\mu)_\sharp, (\lambda,\mu)_\flat \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ は，まず λ と μ を重みの分だけ平行な曲線で実現し，次に $\lambda \cup \mu$ をジグザグにたどっていくことで構成される．図 2，図 3 を参照．ここで $(\lambda,\mu)_\sharp \neq (\lambda,\mu)_\flat \Leftrightarrow i(\lambda,\mu) \neq 0$ である．

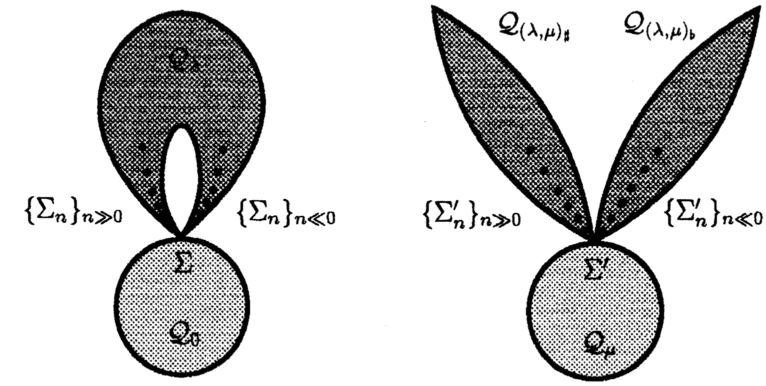

図 1: Theorem 3.2 の説明（$i(\lambda,\mu)\neq 0 \Leftrightarrow (\lambda,\mu)_\sharp \neq (\lambda,\mu)_\flat$ の場合）

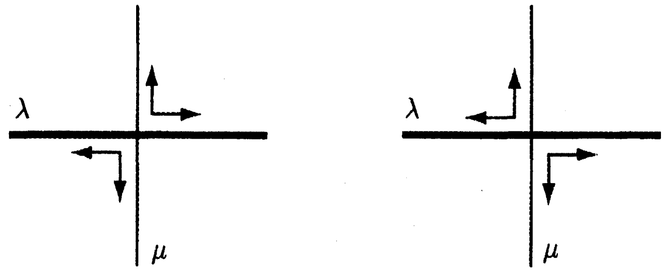

図 2: $(\lambda,\mu)_\sharp$ （左）と $(\lambda,\mu)_\flat$ （右）

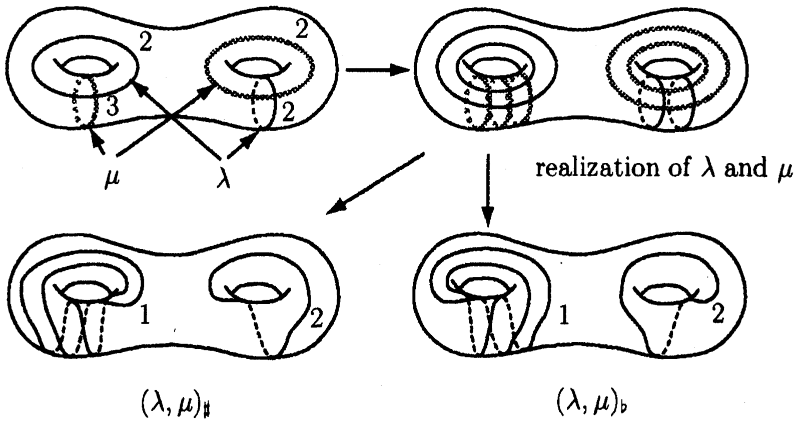

図 3: $(\lambda,\mu)_\sharp$ と $(\lambda,\mu)_\flat$ の例

4 今回の結果

4.1 $\hat{P}(S)$ の定義

ここで $P(S)$ を少し膨らました集合 $\hat{P}(S)$ を定義する．まず，任意の $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対して $\widehat{\mathcal{Q}_\lambda}(\supset \mathcal{Q}_\lambda)$ を

$$\widehat{\mathcal{Q}_\lambda} = \left\{ \{\Sigma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{Q}_\lambda \,|\, \exists \rho = \lim_{n\to\infty} \rho_{\Sigma_n} \in \overline{QF(S)} \right\} / \sim$$

と定める．ここで $\{\Sigma_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{\Sigma'_n\}_{n=1}^{\infty} \Leftrightarrow \lim \rho_{\Sigma_n} = \lim \rho_{\Sigma'_n}$ とする．次に $\overline{\overline{\mathcal{Q}_\lambda}} \subset \widehat{\mathcal{Q}_\lambda}$ を定義する．すなわち $\{\Sigma_n\}_{n=1}^{\infty} \in \widehat{\mathcal{Q}_\lambda}$ が $\{\Sigma_n\}_{n=1}^{\infty} \in \overline{\overline{\mathcal{Q}_\lambda}}$ であるとは，次の条件を満たすときをいう：

(1) $\lim \Sigma_n \in P(S)$，または

(2) $\lim \Sigma_n = \infty$ かつ

  (a) $\exists K^* \subset T(S^*)$: compact s.t. $\{\rho_{\Sigma_n}\} \subset T(S) \times K^*$，または

  (b) $\exists K \subset T(S)$: compact s.t. $\{\rho_{\Sigma_n}\} \subset K \times T(S^*)$.

(1) より $\overline{\mathcal{Q}_\lambda} \subset \overline{\overline{\mathcal{Q}_\lambda}}$ であり，(2-a) より $\rho = \lim \rho_{\Sigma_n} \in \partial^+ QF(S)$，(2-b) より $\rho = \lim \rho_{\Sigma_n} \in \partial^- QF(S)$ である．$\Sigma = \{\Sigma_n\}_{n=1}^{\infty} \in \overline{\overline{\mathcal{Q}_\lambda}}$ に対して $\rho_\Sigma = \lim \rho_{\Sigma_n}$ と定める．これにより hol : $\mathcal{Q}_\lambda \to R(S)$ は hol : $\overline{\overline{\mathcal{Q}_\lambda}} \to R(S)$ に拡張される．$\overline{\overline{\mathcal{Q}_\lambda}}$ には $R(S)$ の位相を hol : $\overline{\overline{\mathcal{Q}_\lambda}} \to R(S)$ によって引き戻した位相を入れる．さて，$P(S)$ と $\left\{\overline{\overline{\mathcal{Q}_\lambda}}\right\}_{\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)}$ の disjoint union から $\hat{P}(S)$ を次のように定める：

$$\hat{P}(S) = P(S) \sqcup \left(\sqcup_{\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)} \overline{\overline{\mathcal{Q}_\lambda}} \right) / \sim,$$

ここで $\sim$ は $\overline{\mathcal{Q}_\lambda} \subset P(S)$ と $\overline{\mathcal{Q}_\lambda} \subset \overline{\overline{\mathcal{Q}_\lambda}}$ を同一視することを意味する．すると hol : $P(S) \to R(S)$ は $\hat{P}(S)$ にまで連続拡張でき，これも hol : $\hat{P}(S) \to R(S)$ とかく．また，以下では次の記号を用いる：

$$\begin{aligned}
\partial \mathcal{Q}_\lambda &= \overline{\overline{\mathcal{Q}_\lambda}} - \mathcal{Q}_\lambda, \\
\partial^+ \mathcal{Q}_\lambda &= \{\Sigma \in \partial \mathcal{Q}_\lambda \,|\, \rho_\Sigma \in \partial^+ QF(S)\}, \\
\partial^- \mathcal{Q}_\lambda &= \{\Sigma \in \partial \mathcal{Q}_\lambda \,|\, \rho_\Sigma \in \partial^- QF(S)\}.
\end{aligned}$$

4.2 Discrete property

以下の Theorem 4.2 (Discrete property) の証明において，次の補題が本質的である．

Lemma 4.1. R を完備双曲曲面で $\mathrm{Area}(R) < \infty$ とする．円環 $A \subset R$ の *core curve* の *homotopy class* を α, その双曲的長さを $l_R(\alpha)$ と書く．このとき

$$\mathrm{Mod}(A)\, l_R(\alpha) \le \sqrt{\mathrm{Area}(R)\, \mathrm{Mod}(A)}$$

が成り立つ．

Remark. 以下で必要な事実は「$\mathrm{Mod}(A) \to 0 \Rightarrow \mathrm{Mod}(A)\, l_R(\alpha) \to 0$」である．当初用いていた評価式はより複雑であり，上の評価式は松崎氏に教えて頂いた．

Proof. $E_R(\alpha)$ を R における α の extremal length とすると，次の 2 式

$$E_R(\alpha) = \sup_\rho \frac{\left(\inf_{\alpha'} \int_{\alpha'} \rho(z)\,|dz|\right)^2}{\int\int \rho(z)^2\,|dz|^2} \ge \frac{(l_R(\alpha))^2}{\mathrm{Area}(R)},$$

$$E_R(\alpha) = \frac{1}{\sup_{A' \subset R} \mathrm{Mod}(A')} \le \frac{1}{\mathrm{Mod}(A)}$$

が成り立つので

$$\mathrm{Mod}(A)\,(l_R(\alpha))^2 \le \mathrm{Area}(R) \Leftrightarrow \mathrm{Mod}(A)\, l_R(\alpha) \le \sqrt{\mathrm{Area}(R)\, \mathrm{Mod}(A)}.$$

□

Theorem 4.2 (Discrete property). $\rho \in \partial^{\pm}QF(S)$ に対して $\Sigma \in \partial^{\pm}\mathcal{Q}_0$ *s.t.* $\rho_\Sigma = \rho$ をとる．いま，任意の収束列 $\mathcal{Q}_0 \ni \Sigma_n \to \Sigma \in \partial^{\pm}\mathcal{Q}_0$ と，異なる元からなる任意の無限列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対して，$\{\mathrm{Gr}_{\lambda_n}(\Sigma_n)\}$ は $P(S)$ に集積点を持たない．

Proof. $(\Sigma_n)_{\lambda_n} = \mathrm{Gr}_{\lambda_n}(\Sigma_n)$ と書き，射影 $\pi : P(S) \to T(S)$ による像を $X_n = \pi((\Sigma_n)_{\lambda_n})$ と書く．このとき $T(S)$ において $X_n \to \infty$ を示す．λ_n が重さ 1 の単純閉曲線の場合のみを考えればよいことは容易に分かる．このとき $\lambda_n = \alpha_n$ と書く．

$QF(S) = T(S) \times T(S^*)$ において，$B_X = \{X\} \times T(S^*)$, $B_Y^* = T(S) \times \{Y\}$ などと表す．$B_X \ni \rho_n \to \rho \in \partial B_X$ または $B_Y^* \ni \rho_n \to \rho \in \partial B_Y^*$ と仮定してよい．いま，$B_X \ni \rho_n \to \rho \in \partial B_X$ の場合を考える．Fuchsian 表現 $\rho_0 \in B_X$ を 1 つとり，対応する $\Sigma_0 \in \mathcal{Q}_0$ s.t. $\rho_{\Sigma_0} = \rho_0$ をとる．このとき $X = \pi(\Sigma_0)$ である．ρ_n は ρ_0 の下半平面 $\mathbf{H}^*$ のみの qc-変形 で得られる．それに対応して，Σ_n も Σ_0 の qc-変形であり，$(\Sigma_n)_{\alpha_n}$ も $(\Sigma_0)_{\alpha_n}$ の qc-変形である．ここで $(\Sigma_0)_{\alpha_n}$ は Σ_0 に，底円の長さ $l_{X_0}(\alpha_n)$, 高さ 2π のユークリッド円環を挟み込んだものであり，その中で，$\mathbf{H}$ の引き戻しに対応する底円の長さ $l_{X_0}(\alpha_n)$, 高さ $\pi/2$ の 2 つの円環（そのうちの 1 つを A_n と書く）は，qc-変形 $(\Sigma_0)_{\alpha_n} \to (\Sigma_n)_{\alpha_n}$ において等角に保たれる．従って，円環 A_n は $X_n = \pi((\Sigma_n)_{\alpha_n})$ に等角に埋め込まれている．いま $\mathrm{Mod}(A_n) = \pi/2l_X(\alpha_n)$ なので，$n \to \infty$ とすると $l_X(\alpha_n) \to \infty$ より $\mathrm{Mod}(A_n) \to 0$ となり，このとき Lemma 4.1 より $\mathrm{Mod}(A_n)\, l_{X_n}(\alpha_n) = \frac{\pi l_{X_n}(\alpha_n)}{2 l_X(\alpha_n)} \to 0$ である．従って $d_{T(S)}(X, X_n) \to \infty$ がいえる．

同様に $B_Y^* \ni \rho_n \to \rho \in \partial B_Y^*$ の場合も，X_n に円環 A_n s.t. $\mathrm{Mod}(A_n) = \pi/l_X(\alpha_n)$ が等角に埋め込まれていることがわかり，$X_n \to \infty$ が分かる． □

4.3 Continuous extension

$\Sigma \in \partial\mathcal{Q}_0$, $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ の組 (Σ, λ) が graftable であるとは，次を満たすときをいう：

(1) $\forall\gamma \subset \operatorname{supp}\lambda$ に対して $\rho_\Sigma(\gamma)$ は loxodromic,

(2) $\Sigma \in \partial^-\mathcal{Q}_0$ のとき，$\operatorname{supp}\lambda$ は parabolic locus $p^+(\rho_\Sigma)$ の任意の連結成分と交わる．

(Σ, λ) が graftable であるとき，具体的に $\Sigma_\lambda = \mathrm{Gr}_\lambda(\Sigma) \in P(S)$ s.t. $\mathrm{hol}(\Sigma_\lambda) = \mathrm{hol}(\Sigma)$ を構成することが出来る．特に $\Sigma \in \partial^-\mathcal{Q}_0$ の場合の構成は Bromberg [Br] による．しかし $\Sigma \in \partial\mathcal{Q}_0$ に対して，(Σ, λ) が graftable である場合でも，Gr_λ の Σ における連続性は自明ではない．すなわち，任意の収束列 $\mathcal{Q}_0 \ni \Sigma_n \to \Sigma \in \partial\mathcal{Q}_0$ に対して $(\Sigma_n)_\lambda \to \Sigma_\lambda$ が成り立つかどうかを考えたい．

Theorem 4.3 (Continuity). 任意の $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対して，$\mathrm{Gr}_\lambda : \mathcal{Q}_0 \to P(S)$ は，$\mathrm{Gr}_\lambda : \overline{\overline{\mathcal{Q}_0}} \to \hat{P}(S)$ に連続拡張される．

Proof. $\Sigma \in \partial^\pm\mathcal{Q}_0$ に対して，任意の収束列 $\mathcal{Q}_0 \ni \Sigma_n \to \Sigma$ を考える．$\rho_n = \rho_{\Sigma_n}$, $\rho = \rho_\Sigma$ とかくと $\rho_n \to \rho$ である．

まず (Σ, λ) が graftable の場合に $(\Sigma_n)_\lambda \to \Sigma_\lambda \in P(S)$ を示す．いま Σ の近傍 U から Σ_λ の近傍 V への同相写像 $\Phi_\lambda : U \to V$ で $\mathrm{hol} \circ \Phi_\lambda = \mathrm{hol}$ を満たすものが存在する．$\Phi_\lambda(\Sigma_n) \to \Sigma_\lambda$ であるから，$\Phi_\lambda(\Sigma_n) = (\Sigma_n)_\lambda$ がいえると良い．そのためには $\Phi_\lambda(\Sigma_n) \in \mathcal{Q}_\lambda$ をいえば十分である．ここで $\Phi_\lambda(\Sigma_n) \in \mathcal{Q}_{\lambda_n}$ $(\lambda_n \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S))$ であるとする．すると discrete property より $\lambda_n \in \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ $(n \gg 0)$ となる．

いま $\Gamma_n = \operatorname{Im}\rho_n$, $\Gamma = \operatorname{Im}\rho$ とすると，(部分列を取れば) Γ_n は $\exists\hat{\Gamma}(\supset \Gamma)$ に幾何的収束し，その limit set $\Lambda(\Gamma_n)$ は $\Lambda(\hat{\Gamma})$ に Hausdorff 収束する．また $\Lambda(\Gamma_n)$ の引き戻し $\Lambda(\Phi_\lambda(\Sigma_n)) \subset \Phi_\lambda(\Sigma_n)$ は $\Lambda(\hat{\Gamma})$ の引き戻し $\hat{\Lambda}(\Sigma_\lambda) \subset \Sigma_\lambda$ に Hausdorff 収束する．ここで，その構成法から $\Lambda(\Gamma)$ の引き戻し $\Lambda(\Sigma_\lambda) \subset \Sigma_\lambda$ はよく分かり，[ACCS] の補題を持ちいれば $\hat{\Lambda}(\Sigma_\lambda) - \Lambda(\Sigma_\lambda)$ の成分の可能性も制限できて，これより $\Lambda(\Phi_\lambda(\Sigma_n)) \subset \Phi_\lambda(\Sigma_n)$ の情報を得て，$\Phi_\lambda(\Sigma_n) \in \mathcal{Q}_\lambda$ が分かる．ここの議論で，有限性 $\lambda_n \in \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ $(n \gg 0)$ が効いている．

次に (Σ, λ) が graftable でない場合を考える．まず $\Sigma_n \to \Sigma$ が強収束であれば $(\Sigma_n)_\lambda \to \exists\Sigma' \in \overline{\overline{\mathcal{Q}_\lambda}} - \overline{\mathcal{Q}_\lambda}$ となる．このとき，graftable の場合と同様の議論により，任意の収束列 $\mathcal{Q}_0 \ni \Sigma_n \to \Sigma$ に対して $(\Sigma_n)_\lambda \to \Sigma'$ を示すことができる．ここで $\Sigma_\lambda = \mathrm{Gr}_\lambda(\Sigma) = \Sigma'$ と定める． □

4.4 Grafting Theorem

以下で，ホロノミー写像は拡張したもの $\mathrm{hol} : \hat{P}(S) \to R(S)$ とする．

Theorem 4.4 (Goldman's Grafting Theorem [Go]). 任意の $\rho \in QF(S)$ に対して $\Sigma \in \mathcal{Q}_0$ *s.t.* $\rho_\Sigma = \rho$ をとると，次が成り立つ：

$$\mathrm{hol}^{-1}(\rho) = \{\Sigma' \in \hat{P}(S) \mid \rho_{\Sigma'} = \rho\} = \{\mathrm{Gr}_\lambda(\Sigma) \mid \lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)\}.$$

特に $\mathrm{hol}^{-1}(\rho) \subset P(S)$ である．

Theorem 4.5 (Grafting theorem for b-group). 任意の $\rho \in \partial^{\pm}QF(S)$ に対して $\Sigma \in \partial^{\pm}\mathcal{Q}_0$ *s.t.* $\rho_\Sigma = \rho$ をとると，次が成り立つ：

$$\mathrm{hol}^{-1}(\rho) = \{\Sigma' \in \hat{P}(S) \mid \rho_{\Sigma'} = \rho\} = \{\mathrm{Gr}_\lambda(\Sigma) \mid \lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)\}.$$

特に $\mathrm{hol}^{-1}(\rho) \cap P(S)$ に関しては次が成り立つ：

$$\begin{aligned} \mathrm{hol}^{-1}(\rho) \cap P(S) &= \{\Sigma' \in P(S) \mid \rho_{\Sigma'} = \rho\} \\ &= \{\mathrm{Gr}_\lambda(\Sigma) \mid (\Sigma, \lambda) : \textit{graftable}\}. \end{aligned}$$

Remark. この結果は Bromberg's Conjecture [Br] の肯定的解決を含む．

Proof. $\rho \in \partial^{\pm}QF(S)$ を固定する．任意の $\Sigma' \in \hat{P}(S)$ s.t. $\mathrm{hol}(\Sigma') = \rho$ に対して，ある $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ が存在して $\Sigma' = \Sigma_\lambda$ となることを示す．

もし $\Sigma' \in \hat{P}(S) - P(S)$ ならば，ある $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ が存在して $\Sigma' \in \overline{\overline{\mathcal{Q}_\lambda}} - \overline{\mathcal{Q}_\lambda}$ である．このとき，定義より収束列 $\{\Sigma'_n\} \subset \mathcal{Q}_\lambda$, $\Sigma'_n \to \Sigma'$ が存在して，$\{\rho_n = \rho_{\Sigma'_n}\} \subset (T(S) \times K^*) \cup (K \times T(S^*))$ かつ $\rho_n \to \rho$ が成り立つ．一方で $\mathcal{Q}_0$ の中の収束列 $\mathcal{Q}_0 \ni \Sigma_n \to \Sigma \in \partial^{\pm}\mathcal{Q}_0$ s.t. $\rho_{\Sigma_n} = \rho_n$ を取る．このとき $\Sigma'_n = (\Sigma_n)_\lambda$ が成り立つので，連続性から $\Sigma' = \Sigma_\lambda$ がいえる．

次に $\Sigma' \in P(S)$ とする．まず $\rho_n \to \rho$ となる $\{\rho_n\}$ を $(T(S) \times K^*) \cup (K \times T(S^*))$ の中にとる．hol の局所同相性より $\mathcal{Q}_0 \ni \exists \Sigma_n \to \exists \Sigma \in \partial^{\pm}\mathcal{Q}_0$ s.t. $\mathrm{hol}(\Sigma_n) = \rho_n$ かつ $\exists \Sigma'_n \to \Sigma'$ s.t. $\mathrm{hol}(\Sigma'_n) = \rho_n$. いま $\Sigma'_n \in \mathcal{Q}_{\lambda_n}$ とすると discrete property より $\lambda_n \in \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ $(n \gg 0)$ となる．部分列を取って $\lambda_n \equiv \mu$ としてよい．このとき $\Sigma'_n = (\Sigma_n)_\mu$ で，$\Sigma'_n \to \Sigma'$ と $(\Sigma_n)_\mu \to \Sigma_\mu$（連続性）より $\Sigma' = \Sigma_\mu$ がいえる． □

4.5 An additional observation

$R(S)$ は多様体であり，その普遍被覆を $\tilde{R}(S)$ とかく．このとき $\mathrm{hol} : P(S) \to R(S)$ の持ち上げ $\widetilde{\mathrm{hol}} : P(S) \to \tilde{R}(S)$ が存在する．明らかに $\widetilde{\mathrm{hol}}$ は immersion である．

Proposition 4.6. $\widetilde{\mathrm{hol}} : P(S) \to \tilde{R}(S)$ は *embedding* ではない．

このことは Theorem 3.2 より分かる．従って $QF(S)$ の自分自身への巻き付き (self-bumping) は，$\tilde{R}(S)$ に持ち上げるより $P(S)$ に持ち上げた方が，より「ほどけている」ことが分かる．

参考文献

[AC] J. W. Anderson and R. D. Canary, *Algebraic limits of Kleinian groups which rearrange the pages of a book*, Invent. Math. **126** (1996), 205–214.

[ACCS] J. W. Anderson, R. D. Canary, M. Culler and P.B. Shalen, *Free Kleinian groups and volumes of hyperbolic 3-manifolds*, J. Diff. Geom. **44** (1996), 738–782.

[Br] K. Bromberg, *Projective structures with degenerate holonomy and the Bers' density conjecture*, preprint 2002.

[Go] W. M. Goldman, *Projective structures with Fuchsian holonomy*, J. Diff. Geom. **25** (1987), 297–326.

[It1] K. Ito, *Exotic projective structures and quasi-Fuchsian space*, Duke Math. J. **105** (2000), 185–209.

[It2] K. Ito, *Exotic projective structures and quasi-fuchsian spaces II*, preprint 2003. `http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~itoken/index.html`

[It3] K. Ito, *On continuous extension of grafting maps*, in preparation.

[Mc] C. T. McMullen, *Complex earthquakes and Teichmuller theory*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 283–320.